Un modèle d'oligopole bilatéral avec pollution

Anicet B. KABRE

EconomiX-CNRS
Université Paris-Nanterre
Bureau G209
200 Avenue de la République
92001 Nanterre Cedex.

Résumé

Dans cet article, nous considérons un modèle à deux secteurs dans lequel il existe un bien polluant. A cet effet, nous considérons le modèle d'oligopole bilatéral de Julien and Tricou 2012 dans lequel nous introduisons une technologie de production polluante. Nous définissons et calculons deux équilibres stratégiques non-coopératifs : l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution et l'équilibre de Cournot avec pollution. Nous montrons notamment que : *(i)* à l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution, la quantité offerte du bien produit augmente avec le coût marginal du concurrent alors qu'elle est susceptible de baisser à l'équilibre de Cournot avec pollution ; *(ii)* une firme polluante est plus sensible à une variation du coût marginal de son concurrent à l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution comparativement à l'équilibre de Cournot avec pollution ; *(iii)* à l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution, le niveau d'émission d'une firme augmente avec le coût marginal du concurrent alors qu'à l'équilibre de Cournot il baisse ; *(iv)* la variation du niveau de rejet d'une firme induite par une variation du coût marginal du concurrent est plus élevée à l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution comparativement à l'équilibre de Cournot ; *(v)* l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution procure un niveau d'utilité plus élevé au leader et aux offreurs du bien non polluant comparativement à l'équilibre de Cournot avec pollution ; *(vi)* à l'équilibre d'oligopole bilatéral avec pollution, les stratégies des agents peuvent coïncider avec l'équilibre concurrentiel avec pollution.

Abstract

In this paper, we consider a two-sector model with a polluting good. For this purpose, we consider Julien and Tricou 2012's bilateral oligopoly model in which we introduce a polluting technology. Our analysis is based on two non-cooperative strategic equilibria: the Stackelberg-Cournot equilibrium with pollution and the Cournot equilibrium with pollution. We show that: *(i)* at the Stackelberg-Cournot equilibrium with pollution, the strategic supply of the non-polluting good increases with the marginal cost of the competitor, whereas it is likely to decrease at the Cournot's equilibrium with pollution ; *(ii)* a polluting firm is more sensitive to a variation of its competitor's marginal cost at the Stackelberg-Cournot equilibrium compared with the Cournot equilibrium; *(iii)* at the Stackelberg-Cournot equilibrium, the firm's emission level increases with the marginal cost of the competitor while it decreases at the Cournot equilibrium; *(iv)* a polluting firm is more sensitive to a variation in the marginal cost of its competitor at the Stackelberg-Cournot equilibrium compared with the Cournot equilibrium; *(v)* the utility level of both the leader and the non pollutant good's suppliers is higher at the Stackelberg-Cournot equilibrium compared with the Cournot equilibrium; *(vi)* agents's equilibrium strategies can coincide with the perfect equilibrium with pollution under particular conditions.

Mots clés : Equilibre général; oligopole bilatéral ; pollution
Classification JEL : D43, D51, Q52

Introduction

Dans ce papier, nous proposons de définir et d'étudier un concept d'équilibre séquentiel avec pollution en étendant le modèle de Julien and Tricou 2012. A cet effet, nous mobilisons un jeu stratégique de marché simple avec deux marchandises, dont l'une est polluante. Nous définissons dans une économie d'échange avec production deux concepts d'équilibre d'oligopole bilatéral : l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution et l'équilibre de Cournot avec pollution. Le premier concept repose sur des interactions stratégiques entre un leader et deux types de follower: un leader et un follower produisent un bien non polluant, tandis que d'autres followers possèdent un bien polluant. Le deuxième concept repose sur un jeu où les interactions sont stratégiques et simultanées.

Nous considérons une économie d'échange avec production avec un nombre fini d'agents dans la lignée de Gabszewicz and Michel 1997 et Julien and Tricou 2012. Le modèle d'oligopole bilatéral développé s'inscrit également dans la logique des modèles développés notamment par Dickson and Hartley 2011, Dickson and Hartley 2013. Ces auteurs ont développé des modèles oligopolistiques du point de vue de l'échange non coopératif. Ces modèles reposent sur un mécanisme de prix issu de la littérature sur les jeux stratégiques de marché[1] (Shapley and Shubik 1977, Sahi and Yao 1989, Amir et al. 1990). Ce mécanisme de formation du prix pallie le problème issu du mécanisme de formation des prix de Shapley and Shubik 1977. En effet, Shapley and Shubik 1977 utilisent dans leur modèle le "commodity money" comme intermédiaire d'échange [2]. Dans ces modèles tous les agents sont stratégiques et chaque agent décide pour chaque bien, la quantité stratégique qu'il sera amené à proposer sur le marché. Il est à noter que Julien and Tricou 2010, Julien and Tricou 2012 intègrent l'asymétrie dans le pouvoir de marché des agents d'une même économie et analysent les interactions stratégiques en équilibre général sur des marchés interconnectés. Le modèle proposé ici s'inspire de ceux de Julien and Tricou 2010, Julien and Tricou 2012. Le modèle est une extension de Julien and Tricou 2012 à un environnement complètement stratégique et dans lequel nous traitons de la pollution. En effet, Julien and Tricou 2012 modélisent dans une économie d'échange avec production deux structures de marché dont l'une est stratégique (équilibre Stackelberg-Cournot) et l'autre semi stratégique (équilibre Stackelberg-Walras). Il se distingue de Julien and Tricou 2012 dans la mesure où l'économie comprend un bien polluant. Ce modèle constitue un premier pas pour analyser la pollution en oligopole bilatéral.

Notre étude contribue à la littérature sur deux aspects.
En premier lieu, ce papier contribue à la littérature des jeux d'interaction stratégique en équilibre général. Notre analyse est effectuée en équilibre général car cette structure prend en compte deux caractéristiques essentielles qui permettent d'occulter certaines critiques formulées à l'encontre de l'équilibre partiel. En effet, l'équilibre général tel qu'introduit par Walras s'intéresse à l'équilibre sur tous les marchés. Il prend en compte les interdépendances entre marchés. Dans notre contexte, pour un équilibre Pareto optimal, il est impératif de prendre en compte les conséquences du comportement d'un agent sur l'équilibre (prix et quantités offertes). De plus, et contrairement à la plupart des modèles d'équilibre partiel avec droits à polluer qui considèrent que les oligopoleurs font face à une fonction de demande exogène et très souvent linéaire (Hahn 1984, Montero 2002, Montero 2009, Chen and Hobbs 2005, Sanin and Zanaj 2011, Sanin and Zanaj 2012), la nôtre est endogène parce qu'elle dépend de la préférence des

[1]Un jeu stratégique est une modélisation des échanges entre agents stratégiques qui se caractérise par une règle de formation des prix et où les prix dépendent des stratégies de ces agents.

[2]La présence de "commodity money" comme intermédiaire d'échange dans une économie engendre des facilités de prêts pouvant conduire à des faillites bancaires. Or, les autres permettent la formation d'un système de prix cohérent.

agents. Dans notre économie les oligopoleurs sont également des consommateurs [3] et déduisent leur autoconsommation de leur production avant de vendre la différence sur le marché. Dès lors que les marchés sont interconnectés, l'équilibre général acquiert toute sa légitimité en tant que structure minimale, pour corriger toutes les défaillances du marché susceptibles d'émerger [4]. Cet article ne traite pas des problèmes relatifs à l'existence et à l'unicité de l'équilibre oligopolistique en équilibre général en raison de problèmes spécifiques soulevés (Bonnisseau and Florig 2003, Gabszewicz 2002, Julien 2017).
En second lieu, nous étudions la pollution dans des modèles d'interaction stratégiques sur des marchés interconnectés. Ceci nous permet d'analyser les conséquences du pouvoir de marché sur les niveaux des émissions polluantes dans des structures de marchés interconnectés. De plus, l'introduction de la pollution permet d'examiner les impacts sur les niveaux d'émission, d'une variation du coût marginal du concurrent dans une économie où les agents ont des pouvoirs de marché asymétriques. Par ailleurs, nous comparons les niveaux d'émission et le bien être des agents sur deux structures de marchés interconnectés avec pollution : l'une où les agents ont un pouvoir de marché symétrique et l'autre où les agents ont un pouvoir de marché asymétrique.

Dans ce contexte, nous obtenons les résultats suivants. Nous caractérisons deux équilibres stratégiques avec pollution. Nous montrons que lorsque le nombre des agents du secteur 2 tend vers l'infini : 1) dans une concurrence à la Stackelberg-Cournot, une firme productrice réagit à une hausse du coût marginal de son concurrent en augmentant son niveau d'émission tandis qu'elle la baisse lorsqu'elles se font une concurrence à la Cournot. 2) dans une concurrence à la Stackelberg-Cournot, une firme i augmente automatiquement sa quantité stratégique offerte lorsque le coût marginal de son concurrent s'accroît tandis qu'à l'équilibre de Cournot elle peut la réduire. 3) dans une concurrence à la Stackelberg-Cournot, le leader émet plus de rejet polluant même si la préférence des agents pour le bien produit augmente. 4) dans une concurrence à la Stackelberg-Cournot, le niveau d'émission d'une firme est plus sensible à la variation du coût marginal du concurrent comparativement à l'équilibre de Cournot. 5) le pouvoir de marché induit le prix à la hausse si les firmes ont des coûts de production élevés. 6) le fait de ne pas être "price taker" ne confère pas obligatoirement la capacité de manipuler le prix d'équilibre. 7) contrairement à l'idée selon laquelle le prix d'un bien baisse lorsque la quantité offerte de ce bien augmente, nous montrons que malgré la normalité du bien produit, son prix peut augmenter même si sa disponibilité sur le marché s'accroît. 8) les stratégies des agents à l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution coïncident avec celles de Cournot sous certaines conditions.

Après avoir présenté le modèle, nous définissons puis analysons l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution que nous comparons à l'équilibre de Cournot avec pollution et à l'équilibre concurrentiel avec pollution.

1 Le modèle

Dans cette section, nous allons présenter l'économie, spécifier les dotations et les principes qui régissent le jeu. Nous adoptons les notations suivantes:
$|I^1|$ = ensemble des agents du secteur 1.
$|I^2|$ = ensemble des agents du secteur 2.

[3] Une entreprise agroalimentaire qui produit en achetant des céréales par exemple.

[4] Cette étude vient également solutionner les problèmes liés à la normalisation des prix qui sont récurrents dans des modèles de concurrences imparfaites (Gabszewicz and Vial 1972, Dierker and Grodal 1986, Dierker and Grodal 1999). Notre analyse est principalement axée sur l'équilibre non autarcique comme dans Dickson and Hartley 2013.

y^1 = quantité totale de bien 1 produite par la firme 1.
y^2 = quantité totale de bien 1 produite par la firme 2.
q^1 = quantité stratégique de bien 1 offerte sur le marché par la firme productrice 1.
q^2 = quantité stratégique de bien 1 offerte sur le marché par la firme productrice 2.
e^1 = quantité de rejets polluants de la firme 1
e^2 = quantité de rejets polluants de la firme 2
b^j = quantité stratégique de bien 2 offerte par l'agent $j (j = 1, ..., n)$
$s^i = (q^i, e^i)$ = stratégie de l'agent producteur i.
$s^j = b^j$ = stratégie de la firme $j (j = 1, ..., n)$
$b = (b^1, b^2, ...b^n)$= vecteur des stratégies d'équilibre des agents du secteur 2.
$\tilde{b} = (\tilde{b}^1, \tilde{b}^2, ...\tilde{b}^n)$= vecteur des stratégies d'équilibre des agents du secteur 2 à l'équilibre Stackelberg-Cournot.
$\widehat{b} = (\widehat{b}^1, \widehat{b}^2, ...\widehat{b}^n)$ = vecteur des stratégies d'équilibre des agents du secteur 2 à l'équilibre de Cournot.
q= (q^1, q^2) = vecteur des stratégies des agents du secteur 1.
$\tilde{q}$= $(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2)$ = vecteur des stratégies d'équilibre des agents du secteur 1 à l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution.
$\widehat{q}$= $(\widehat{q}^1, \widehat{q}^2)$ = vecteur des stratégies d'équilibre des agents du secteur 1 à l'équilibre de Cournot avec pollution.
β^2 = l'inverse de la productivité de la firme 2.
$x^h = (x_1^h, x_2^h)$ = allocation d'équilibre ou quantité consommée des biens 1 et 2 à l'équilibre par l'agent économique h.

1.1 L'économie

Nous considérons une économie d'échange avec production du type de celles développées par Gabszewicz and Michel 1997 et Julien and Tricou 2012. L'économie comprend deux biens : le bien 1 et le bien 2. Il existe deux types d'agents : les agents de type 1 produisent le bien 1 et les agents de type 2 offrent le bien 2. On représente par $I^1 = \{1, 2\}$ indexé par i, l'ensemble des agents du secteur de production et par $I^2 = \{1, 2, ...n\}$ indexé par j, l'ensemble des agents qui offrent le bien 2 avec $I^1 \cup I^2 = I$ et $I^1 \cap I^2 = \emptyset$ et $|I^1| > 1, |I^2| > 1$. Chaque agent consomme les deux biens. Soient p_1 et p_2, les prix respectifs des biens 1 et 2, le prix p désigne le prix relatif du bien 1 en termes du bien 2.

Le bien 2 est offert de manière stratégique et est utilisé par les agents producteurs comme intrant dans la production du bien 1. Quant au bien 1, il est produit et offert stratégiquement par les agents du secteur 1. Le bien 2 en lui même n'est pas responsable de la pollution [5], c'est sa combustion qui est source de rejets polluants : la technologie de production est donc polluante. Notre analyse ne prend pas en compte les externalités environnementales dues à l'activité d'une firme sur une autre et nous supposons qu'il n'existe pas de marché de permis [6]. Pour des raisons de simplification, on considère que $p_2 = 1$. Le taux de change (prix) dépend explicitement des quantités stratégiques offertes.
Afin d'étudier les fondements, nous présentons les préférences, les dotations et les technologies.

1.2 Préférences, dotations et technologies

Les agents de notre économie ont la même fonction d'utilité et celle ci dépend de la consommation des deux biens. Cette fonction est représentée comme suit:

$$U(x_1^h, x_2^h) = \alpha \ln x_1^h + (1 - \alpha) \ln x_2^h, \quad \alpha \in (0, 1) \quad \forall i = 1, 2 \quad j = 1, ..n \tag{1}$$

[5] La pollution est due à l'utilisation du facteur de production qui génère des nuisances
[6] L'inexistence de marché de permis implique que les firmes ne peuvent pas s'échanger les droits à polluer.

La fonction d'utilité est concave et x_1^h et x_2^h sont respectivement les quantités consommées des biens 1 et 2 par l'agent h. La concavité de la fonction rend suffisantes les conditions de premier ordre de maximisation de l'utilité. Les dotations initiales [7] des deux catégories d'agents sont représentées comme suit

$$w^i = (0,0), \qquad \forall i = 1,2 \tag{2}$$

$$w^j = \left(0, \frac{1}{n}\right), \qquad \forall j = 1, ..., n \tag{3}$$

Le choix de la forme des dotations initiales n'est pas anodin et trouve sa légitimité dans la théorie du commerce international (voir annexe 1). A l'image de Gabszewicz and Michel 1997, un oligopoleur doit produire pour consommer. On désigne par Y^i l'ensemble de production de l'agent $i = 1,2$ et on note $Y^i = \{(y^i, z_2^i) \in \mathbb{R}^2 | y^i \leq \frac{1}{\beta^i}\}$. En utilisant une quantité z_2^i du bien 2 un oligopoleur $i \in I^1$ produit une quantité y^i du bien 1 selon une technologie linéaire à rendement d'échelle constant représentée comme suit:

$$y^i = \frac{1}{\beta^i} z_2^i, \quad \beta^i > 0, \quad \forall i = 1,2 \tag{4}$$

y^i désigne la quantité maximale pouvant être produite par l'agent i lorsqu'il utilise une quantité z^i du bien 2 comme intrant. La productivité d'un facteur de production étant égale au rapport entre la quantité d'output obtenue et celle de l'input utilisée, alors β^i est l'inverse de la productivité du bien 2 pour l'agent i. En outre, nous supposons comme dans Sanin and Zanaj 2011 ; Crettez et al. 2014, que l'utilisation de l'intrant z^i génère de la pollution e^i selon l'écriture suivante:

$$e^i = \frac{1}{\gamma^i} z^i, \quad \gamma > 0, \quad \forall i = 1,2 \tag{5}$$

Dans cette expression, γ^i mesure la magnitude (ampleur) de la pollution. En se référant aux deux précédentes équations, on peut réécrire la quantité y^i du bien 1 produite par l'oligopoleur i en fonction des émissions

$$y^i = \frac{\gamma^i}{\beta^i} e^i, \quad \forall i = 1,2 \tag{6}$$

Dans cette équation (6), β est spécifique à chaque firme contrairement au modèle de Crettez et al. 2014, où β est une constante. En augmentant la quantité de bien 1 produite, on augmente également la quantité des émissions rejetées. Un agent producteur i achète une quantité z^i du bien 2 pour produire du bien 1. Il supporte donc un coût de production $p_2 z^i$. Il n'existe pas de coût fixe. En se référant aux différentes équations précédentes, $z^i = \gamma^i e^i = \beta^i y^i$ [8]. La fonction de coût croît au fur et à mesure que l'on utilise du bien 2 et peut atteindre un niveau où le coût marginal de production excède le prix du bien produit. En d'autres termes, des hypothèses sont émises sur cette fonction de coût. Soit q^{**} ce point et $c^i(e^i)$ le coût. Afin de faire du profit positif, on impose une limite : $p_1(0) > max\{\frac{\partial c^i(e^i)}{\partial q^i}(0, i \in I^1)\}$ et $\frac{\partial c^i(e^i)}{\partial q^i}(q^{**}) \geq p_1$ pour tout $q^i \geq q^{**}$. Le coût marginal est représenté par $\frac{\partial c^i(e^i)}{\partial q^i}$.

[7] voir annexe 1

[8] Les niveaux de pollution des firmes diffèrent même si $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma$, car ceux ci dépendent également de β^i.

1.3 Le jeu

Notre économie comporte un leader et $(n + 1)$ followers qui se comportent tous de manière stratégique. Chaque agent du secteur de production, selon qu'il s'engage dans une concurrence à la Stackelberg ou à la Cournot se pose la même question: quelle quantité de rejets polluants doit-il émettre et quelle quantité du bien 1 doit-il offrir sur le marché de sorte à maximiser son utilité, bien évidemment en fonction de la préférence des agents de l'économie. Les agents du secteur 2, lorsqu'ils se comportent de manière stratégique, manipulent le système de prix $(p_1, 1)$ via la quantité du bien 2 qu'ils offrent dans le but d'obtenir le meilleur taux de change (rapport) possible.

Soient S^1 et S^2 les produits cartésiens respectifs des ensembles stratégiques des agents du secteur 1 et du secteur 2, ces ensembles des stratégies des agents étant donnés par:

$$s^i = \left\{(q^i, e^i) \in \mathbb{R}^2_+ | 0 \leq q^i \leq \frac{\gamma^i}{\beta^i} e^i\right\}, \quad \forall i = 1, 2$$
$$s^j = \left\{b^j \in \mathbb{R}_+ | 0 \leq b^j \leq \frac{1}{n}\right\}, \quad \forall j = 1, ..., n$$

avec

$$S^1 = \prod_i^2 s^i = s^1 \times s^2$$
$$S^2 = \prod_j^n s^j = s^1 \times s^2 \times ....s^j, \quad \forall j (j = 1, ..., n)$$

Ces stratégies sont des stratégies pures car aucune distribution de probabilité n'est associée aux quantités offertes. Étant données ces stratégies, les expressions des profits des agents sont respectivement :

$$\pi_1^1(q^1, e^1) = p_1.q^1 - \beta^1 e^1, \quad i = 1 \tag{7}$$
$$\pi_1^2(q^2, e^2) = p_1.q^2 - \beta^2 e^2, \quad i = 2 \tag{8}$$
$$\pi_2^j(b^j) = p_2 b^j, \quad j = 1, ...n \tag{9}$$

Ici [9] , q^1 et q^2 sont les quantités stratégiques offertes de bien 1 par le leader et le follower et, $b^j (j = 1, ..., n)$ représente la quantité offerte de bien 2 par les agents stratégiques du secteur 2. Chaque agent utilise son gain (profit pour les agents i et recette pour les agents j) pour se procurer le bien (bien 1 et bien 2 respectivement) dont il ne dispose pas dans sa dotation initiale. Ainsi $\pi_1^i, i = 1, 2$ servira à l'achat du bien 2 et $\pi_2^j, j = 1, ...n$ financera l'achat du bien 1.

Les agents du secteur 2 sont des oligopoleurs qui se livrent à une concurrence à la Cournot : ils sont tous des followers. En revanche, sur le marché du bien 1, l'agent 1 est leader et l'agent 2 est follower. Ensuite, nous comparons cet équilibre à l'équilibre de Cournot où il existe une information parfaite entre les followers d'une même cohorte et une asymétrie d'information entre les followers de cohortes différentes.

[9] $\pi_1^i(q^i, y_1^i) = p_1.q^i - \beta^i y_1^i$, où y est la quantité totale produite. La quantité des rejets émise (e) dépend de la quantité produite (y). Nous choisissons délibérément de remplacer y par e dans l'expression du profit pour expliciter la relation entre profit et niveau de pollution.

Intuitivement, à l'équilibre Stackelberg-Cournot, le leader offrira une quantité plus élevée que le follower et pour cette raison on suppose que $\frac{1}{\beta^1} > \frac{1}{\beta^2}$ [10]. Les équilibres de ces jeux résultent de la compatibilité et de la cohérence des plans d'agents rationnels. Il s'agit donc d'un jeu en deux étapes résolu par récurrence à rebours. Les (n+1) followers maximisent leurs paiements à stratégie donnée du leader ; le leader maximise son paiement en prenant en compte les meilleures réponses.

Le prix p est déterminé comme chez Shapley and Shubik 1977. En l'absence de commodity money, le prix est le rapport de la somme des quantités stratégiques offertes. En effet, il est égal au rapport entre la quantité totale offerte de l'intrant (bien 2) et la quantité stratégique du bien produit (bien 1) (Julien and Tricou 2010 Julien and Tricou 2012). Compte tenu des profils de stratégies, $\forall((q^1, q^2); b) \in S^1 \times S^2$, le prix p_1 est donné par :

$$p_1(q^1, q^2, b) = \frac{\sum_j b^j}{\sum_i q^i} = \frac{B}{Q} \tag{10}$$

Dans notre économie, le profit d'un agent i lui servira à financer sa consommation (consommation en tant qu'input et en tant que bien) du bien 2. La différence entre la quantité de bien 1 qu'il produit et ce qu'il offre stratégiquement sur le marché, c'est à dire $y^i - q^i$ constitue son autoconsommation que nous notons x_1^i. Chaque agent i doit choisir à la fois la quantité q^i du bien 1 qu'il désire offrir sur le marché mais aussi la quantité e^i des rejets polluants qu'il émettra dans son processus de production. En outre, il connait sa capacité à influencer le vecteur de prix d'équilibre $p = (p_1, p_2)$ et l'intègre dans sa prise de décision. Un agent i obtient une quantité $(pq^i - \gamma e^i)$ de bien 2 en échange de la quantité (q^i) de bien 1 qu'il offre. Un agent j obtient une quantité $(\frac{Q}{B} b^j)$ de bien 1 en échange de $(w^j - b^j)$ unités du bien 2. Compte tenu du prix, les agents i et j obtiennent les allocations suivantes [11] :

$$x^i = (x_1^i, x_2^i) = \left(y^i - q^i; \frac{B}{q^i + q^{-i}} q^i - \gamma^i e^i\right) \quad i = 1, 2 \tag{11}$$

$$x^j = (x_1^j, x_2^j) = \left(\frac{Q}{b^j + B^{-j}} b^j; \frac{1}{n} - b^j\right) \quad j = 1, ..., n \tag{12}$$

Étant données les allocations ci-dessus, les agents obtiennent les fonctions d'utilités indirectes suivantes :

$$V^i(q^i, q^{-i}, B) = \alpha \ln\left(y^i - q^i\right) + (1 - \alpha) \ln\left(\frac{B}{q^i + q^{-i}} q^i - \gamma^i e^i\right) \quad i = 1, 2 \tag{13}$$

$$V^j(Q, b^j, B^{-j}) = \alpha \ln\left(\frac{Q}{b^j + B^{-j}} b^j\right) + (1 - \alpha) \ln\left(\frac{1}{n} - b^j\right) \quad j = 1, ..., n \tag{14}$$

Dans ces expressions, b est le vecteur des stratégies d'équilibre des agents du secteur 2 ($j = 1, ...n$) et s'écrit $b = (b^1, b^2, ..., b^n)$. De la même manière, q est le vecteur des stratégies d'équilibre des agents du secteur 1 et s'écrit $q = (q^1, q^2)$. Nous déterminons et analysons d'abord l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution, que nous comparons ensuite avec celui de Cournot avec pollution et l'équilibre concurrentiel avec pollution.

[10] Pour l'équilibre de Stackelberg, le plus important est l'ordre du jeu. Notre spécification de la productivité tient compte des conditions d'existences de $\tilde{q}^2$.

[11] Les allocations individuelles des agents sont données par $\tilde{x}^1 = (x_1^1, x_2^1) = \left((y_1 - q^1), \pi_1^1\right), \tilde{x}^2 = (x_1^2, x_2^2) = \left((y_2 - q^2), \pi_1^2\right), \quad \tilde{x}^j = \left(\frac{\pi_2^j}{p_1}, \frac{1}{n} - b^j\right)$

2 L'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution

L'équilibre Stackelberg-Cournot tel que décrit précédemment est l'équilibre du jeu non coopératif dans lequel les joueurs sont les oligopoleurs des différents secteurs (secteurs 1 et 2), les stratégies correspondent aux quantités offertes et les paiements aux profits [12].

Définition 1 **:** L'équilibre Stackelberg-Cournot est donné par un vecteur de prix $\tilde{p_1} = p_1(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2; b)$, un vecteur de stratégie $(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2; \tilde{b}^1, \tilde{b}^2, ..., \tilde{b}^n)$ dans lequel $\tilde{q}^1 \in [0, y^1], \tilde{q}^2 \in [0, y^2], \tilde{b}^j \in [0, \frac{1}{n}], j = 1, ...n$, et une allocation $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2; \tilde{x}^3, ...\tilde{x}^{n+2}) \in \Re_+^{2(n+2)}$, tels que :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}^i &= x^i(\tilde{q}, \tilde{p}_1) \quad \forall i = 1, 2 \\
\tilde{\mathbf{x}}^j &= x^j(\tilde{b}, \tilde{p}_1) \quad \forall j = 3, 4, ..., n + 2 \\
\tilde{q}^1 + \tilde{q}^2 &= \frac{\sum_{j=1}^n \tilde{b}^j}{\tilde{p}_1} \\
U^j(\tilde{q}^1; \tilde{q}^2, \tilde{b}^j, \tilde{b}^{-j}) &\geq U^j(\tilde{q}^1; \tilde{q}^2, b^j, \tilde{b}^{-j}), \quad j = 3, ...n + 2 \\
U^2(\tilde{q}^2, p_1(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2; \tilde{b}) &\geq U^2(\tilde{q}^2, p_1(\tilde{q}^1, q^2; \tilde{b})), \quad \forall b \in \prod_j S^j, \forall q^2 \in S^2 \\
U^1(x^1(\tilde{q}^1, p_1(\tilde{q}^1, f(\tilde{q}^1); \tilde{b}))) &\geq U^1(x^1(q^1, p_1(q^1, f(q^1; g^1(\tilde{q}^1), ..., g^n(\tilde{q}^1)))), \quad q^1 \in S^1
\end{aligned}$$

La proposition suivante donne les valeurs des stratégies à l'équilibre de Stackelberg-Cournot avec pollution.

Proposition 1 *: L'équilibre de Stackelberg-Cournot avec pollution est donné par les stratégies* $(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{b}^j)$ *et les niveaux d'émission* $(\tilde{e}^1, \tilde{e}^2)$ *suivants :*

$$\tilde{q}^1 = \frac{\alpha\beta^2}{4(\beta^1)^2}\phi \tag{15}$$

$$\tilde{q}^2 = \frac{\alpha\phi}{4(\beta^1)^2}\left[2\beta^1 - \beta^2\right] \tag{16}$$

$$\tilde{b}^j = \frac{\alpha(n-1)}{n(n-\alpha)} \quad \forall j = 1, ..., n \tag{17}$$

$$\tilde{e}^1 = \frac{\alpha(1+\alpha)}{4\gamma^1}\frac{\beta^2}{\beta^1}\phi \tag{18}$$

$$\tilde{e}^2 = \frac{\alpha^2\phi}{2\gamma^2}\left[\left(2 - \frac{\beta^2}{\beta^1}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1-\alpha}{2\alpha}\frac{\beta^2}{\beta^1}\left(2 - \frac{\beta^2}{\beta^1}\right)\right] \tag{19}$$

Preuve : voir annexe 2

Le prochain résultat donne une propriété des stratégies d'équilibre.

Proposition 2 *: Un agent producteur augmente son niveau de rejet polluant lorsque la productivité de son concurrent baisse.*

[12] Le profit correspond à la recette dans le secteur 2 dans la mesure où nous ne prenons pas en compte l'existence de coûts de production du bien 2 .

Preuve: Lorsque la productivité de l'agent i baisse, la quantité stratégique qu'il offre diminue ($\frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial \beta^i} > 0$) tandis que celui de son concurrent (-i) augmente. En effet, $\frac{\partial \tilde{q}^1}{\partial \beta^2} = \frac{\alpha\phi}{4(\beta^1)^2} > 0$ et, $\frac{\partial \tilde{q}^2}{\partial \beta^1} = \frac{\alpha\phi}{2(\beta^1)^2}(\frac{\beta^2}{\beta^1} - 1) > 0$. la quantité $\tilde{q}^2 > 0$ signifie que $2\beta^1 > \beta^2$. Aussi, la réaction du follower est plus élévée que celle du leader (si$\frac{\beta^2}{\beta^1} > \frac{3}{2}$) car $\frac{\partial \tilde{q}^2}{\partial \beta^1} - \frac{\partial \tilde{q}^1}{\partial \beta^2} = \frac{\alpha\phi}{2(\beta^1)^2}\left(\frac{\beta^2}{\beta^1} - \frac{3}{2}\right) > 0$. Une augmentation de β^2 s'interprète comme une baisse de la productivité ($\frac{1}{\beta^2}$) de l'agent 2 ou encore une hausse de son coût marginal. Par conséquent une baisse de la productivité du follower induit une hausse du niveau des rejets émis par le leader $\left(\frac{\partial \tilde{e}^1}{\partial \beta^2} = \frac{\alpha(1+\alpha)\phi}{4\gamma^1\beta^1} > 0\right)$. De même, une baisse de la productivité du leader provoque une élévation du niveau de rejet du follower $\left(\frac{\partial \tilde{e}^2}{\partial \beta^1} > 0\right)$. Le follower augmente la quantité qu'il produit au fur et à mesure que son écart de productivité avec le leader s'amenuise (quand la productivité du leader baisse, l'écart de productivité entre les deux agents producteurs baisse). Cependant, la variation du prix dépendra de l'ampleur de la réduction de la quantité stratégique offerte par i comparativement à l'ampleur de la hausse de la quantité stratégique offerte par son concurrent $(-i)$.

Compte tenu des stratégies d'équilibre, le prix est donné par :

$$\tilde{p}_1 = 2\beta^1 \tag{20}$$

Remarque 1*:* A l'équilibre Stackelberg-Cournot, le prix augmente avec l'offre stratégique du bien 1. En effet, la variation de la quantité stratégique offerte par le follower suite à une variation du coût marginal du leader est supérieure à la variation de la quantité stratégique du leader due une variation du coût marginal du follower. En effet, $\frac{\partial \tilde{q}^2}{\partial \beta^1} = \frac{\alpha\phi}{2(\beta^1)^2}\left(\frac{\beta^2}{\beta^1} - 1\right)$ et $\frac{\partial \tilde{q}^1}{\partial \beta^2} = \frac{\alpha\phi}{4(\beta^1)^2}$ et $\frac{\partial \tilde{q}^2}{\partial \beta^1} - \frac{\partial \tilde{q}^1}{\partial \beta^2} = \frac{\alpha\phi}{2(\beta^1)^2}\left(\frac{\beta^2}{\beta^1} - \frac{3}{2}\right)$. De notre hypothèse selon laquelle $\beta^1 < \beta^2$, on déduit que $\left(\frac{\partial \tilde{q}^2}{\partial \beta^1} - \frac{\partial \tilde{q}^1}{\partial \beta^2}\right) > 0$ tant que $\beta^2 > \frac{3}{2}\beta^1$. Aussi, $\frac{\partial \tilde{q}^1}{\partial \beta^1} = -\frac{\alpha\beta^2\phi}{2(\beta^1)^3}$ et $\frac{\partial \tilde{q}^2}{\partial \beta^1} - \frac{\partial \tilde{q}^1}{\partial \beta^1} = \frac{\alpha\phi}{2(\beta^1)^2}\left[2\frac{\beta^2}{\beta^1} - 1\right] > 0$ car $\frac{\beta^2}{\beta^1} > 1$.

Les agents obtiennent les allocations d'équilibre suivantes :

$$(\tilde{x}_1^1, \tilde{x}_2^1) = \left[\left(\frac{\alpha}{2\beta^1}\right)^2 \beta^2\phi, \frac{\alpha(1-\alpha)}{4}\frac{\beta^2}{\beta^1}\phi\right] \tag{21}$$

$$(\tilde{x}_1^2, \tilde{x}_2^2) = \left[\tilde{x}_1^2, \tilde{x}_2^2\right] \tag{22}$$

$$\tilde{x}_1^2 = \frac{\alpha\phi}{2}\left[\frac{\alpha}{\beta^2}\sqrt{2 - \frac{\beta^2}{\beta^1}} + \frac{1-\alpha}{2(\beta^1)^2}\left(2 - \alpha\frac{\beta^2}{\beta^1}\right)\right] \tag{23}$$

$$\tilde{x}_2^2 = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\phi\left[\sqrt{2 - \frac{\beta^2}{\beta^1}} - \frac{\beta^2}{2\beta^1}\left(2 - \frac{\beta^2}{\beta^1}\right)\right] \tag{24}$$

$$(\tilde{x}_1^j, \tilde{x}_2^j) = \left(\frac{\alpha\phi}{2n\beta^1}, \frac{1-\alpha\phi}{n}\right) \quad \forall j = 1, ..., n \tag{25}$$

Remarque 2*:* On peut réexprimer l'allocation du leader en fonction de la quantité stratégique qu'il offre à l'équilibre :

$$\tilde{x}^1 = (x_1^1, x_2^1) = \left[\alpha\tilde{q}^1, (\beta^1 - \alpha\beta^1)\tilde{q}^1\right] \tag{26}$$

Étant données ces allocations, les agents obtiennent les paiements suivants à l'équilibre :

$$(\tilde{U}^1) = (1+\alpha)\ln\left(\frac{\alpha}{2\beta^1}\right) + (1-\alpha)\ln\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) + (2-\alpha)\ln\beta^2\phi \tag{27}$$

$$(\tilde{U}^2) = \alpha\ln\left[\tilde{x}_1^2\right] + (1-\alpha)\ln\left[\tilde{x}_2^2\right] \tag{28}$$

$$(\tilde{U}^j) = \alpha\ln\left(\frac{\alpha\phi}{2n\beta^1}\right) + (1-\alpha)\ln\frac{1-\alpha\phi}{n}, \quad j = 1, ..., n \tag{29}$$

3 Analyse de l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution

Dans cette section, nous analysons les relations qui existent entre les stratégies du leader et du follower à l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution.

3.1 Relations entre les stratégies d'équilibre

Ici, tous les agents ont un pouvoir de marché indépendamment de leur secteur d'appartenance. Nous analysons les différentes stratégies d'équilibre et déterminons les conditions sous lesquelles ces différents équilibres coïncident lorsque le nombre des agents tend vers l'infini dans le secteur 2. Nous déterminons également la valeur critique des préférences qui égaliserait le niveau des rejets polluants entre firmes.

Remarque 3*:* En réexprimant les expressions des quantités stratégiques entre elles et les niveaux d'émission en fonction de ces quantités stratégiques offertes, on obtient:

$$\tilde{q}^2 = \frac{2\beta^1 - \beta^2}{\beta^2}\tilde{q}^1$$
$$\tilde{e}^1 = \frac{\beta^1(1+\alpha)}{\gamma^1}\tilde{q}^1$$

A l'équilibre Stackelberg-Cournot, $(\tilde{q}^2 - \tilde{q}^1) < 0$: la quantité stratégique offerte par le follower est inférieure à celle du leader à l'équilibre Stackelberg-Cournot. Par contre, ces quantités coïncident si $\beta^1 = \beta^2$.

Proposition 3 *: Si $\alpha \to 1$ et $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma$, le niveau d'émission et la quantité stratégique offerte par le follower sont moins élevés que ceux du leader.*

Preuve: Si $\alpha \to 1$ et $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma$, alors $\lim_{\alpha\to 1}(\tilde{e}^1 - \tilde{e}^2) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{\alpha\phi}{2\gamma}\left[\frac{\beta^2}{2\beta^1}\left(3\alpha - 1 + (1-\alpha)\frac{\beta^2}{\beta^1}\right) - \alpha\sqrt{2 - \frac{\beta^2}{\beta^1}}\right]$. En se référant à notre hypothèse de départ selon laquelle $\frac{\beta^2}{\beta^1} > 1$, on réécrit que $(\tilde{e}^2 - \tilde{e}^1) < 0$. De même, $\tilde{q}^2 = \frac{2\beta^1 - \beta^2}{\beta^2}\tilde{q}^1$ et $\beta^1 < \beta^2$ d'où $\left(\frac{2\beta^1}{\beta^2} - 1\right) < 1$ et $\tilde{q}^2 - \tilde{q}^1 < 0$. Aussi, les quantités stratégiques offertes et les niveaux d'émission étant positifs, on déduit que $\beta^1 < \beta^2 < 2\beta^1$.

Résultat: A l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution, seul le coût marginal du leader impacte le prix du marché. En outre, $\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\beta^1} > 0$: le prix augmente lorsque le coût marginal du leader s'accroît, c'est-à-dire si la productivité du leader $\left(\frac{1}{\beta^1}\right)$ devient de plus en plus faible. Le pouvoir de marché du leader induit le prix à la hausse lorsque son coût marginal augmente, c'est-à-dire lorsque son éfficacité baisse. Grâce à son pouvoir de marché, une firme à faible efficacité provoque une hausse du prix du marché.

Commentaires : Le résultat ci dessus présente un effet négatif du pouvoir de marché sur les consommateurs. Il montre que les consommateurs peuvent supporter des coûts liés à la productivité des firmes : concrètement, lorsqu'une firme a une faible efficacité, c'est-à-dire un coût marginal élevé, et possède néanmoins un pouvoir de marché élevé, ce sont les consommateurs du bien produit qui supportent le coût de cette inefficacité en payant un prix élevé. Ainsi donc, même en dehors des effets externes liés à la pollution des firmes sur les consommateurs, ces derniers ont parfois intérêt à ce que les firmes soient performantes (coût de production faible). Ceci justifie le constat du prix élevé de certains biens par le fait de l'inefficacité des entreprises concernées cumulé (à) leur pouvoir de marché.

La proposition suivante définit les conditions sous lesquelles la stratégie et le niveau d'émission du leader coïncident avec ceux du follower.

Proposition 4 : Si $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma$, alors les niveaux de rejet du leader et du follower sont identiques s'ils ont la même productivité.

Preuve: Nous calculons les limites à l'infini pour démontrer les coïncidences entre les différentes stratégies des agents producteurs lorsque le nombre des agents du secteur 2 tend vers l'infini. En effet, $\lim_{n\to\infty}\phi = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n-\alpha}\right) = 1$. Ainsi, $\lim_{n\to\infty}\tilde{q}^2 = \lim_{n\to\infty}\tilde{q}^1 = \frac{\alpha\beta^2}{4(\beta^1)^2}$ si et seulement si $(\frac{2\beta^1-\beta^2}{\beta^2}) = 1$. Ceci revient à dire que $\beta^1 = \beta^2$. Précisément, $\lim_{n\to\infty}\tilde{q}^1 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha\beta^2}{4(\beta^1)^2}\phi\right) = \frac{\alpha\beta^2}{4(\beta^1)^2}$ et $\lim_{n\to\infty}\tilde{q}^2 = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\alpha}{4(\beta^1)^2}\left(2\beta^1-\beta^2\right)\right] = \frac{\alpha\beta^2}{4(\beta^1)^2}\left(\frac{2\beta^1-\beta^2}{\beta^2}\right)$. En remplaçant β^1 par β^2, on obtient que $\tilde{e}^2 = \frac{\alpha^2\phi}{2\gamma}\left(1+\frac{1-\alpha}{2\alpha}\right) = \frac{\alpha\phi}{2\gamma}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$, $\tilde{e}^1 = \frac{\alpha^2+\alpha}{4\gamma}\phi$ et, $\lim_{n\to\infty}\tilde{e}^1 = \lim_{n\to\infty}\tilde{e}^2 = \frac{\alpha^2+\alpha}{4\gamma}$, si $\gamma = \gamma^1 = \gamma^2$.

Ensuite, nous apprécions le niveau des émissions selon les valeurs des productivités des agents qui produisent le bien 1, lorsque le nombre des agents du secteur 2 tend vers l'infini. En outre, nous montrons le rôle des préférences sur les niveaux d'émission. L'expression de la différence entre les niveaux d'émission est :

$$\tilde{e}^1 - \tilde{e}^2 = \frac{\alpha\phi}{2\gamma^2}\left[\frac{\beta^2}{2\beta^1}\left(\alpha\left(2+\frac{\gamma^2}{\gamma^1}\right)+\frac{\gamma^2}{\gamma^1}-2+(1-\alpha)\frac{\beta^2}{\beta^1}\right)-\alpha\sqrt{2-\frac{\beta^2}{\beta^1}}\right] \tag{30}$$

Lorsque $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma$, on a:

$$\tilde{e}^1 - \tilde{e}^2 = \frac{\alpha\phi}{2\gamma}\left[\frac{\beta^2}{2\beta^1}\left(3\alpha-1+(1-\alpha)\frac{\beta^2}{\beta^1}\right)-\alpha\sqrt{2-\frac{\beta^2}{\beta^1}}\right] \quad > 0 \tag{31}$$

Nous déterminons aussi le niveau des préférences qui égaliserait les quantités des polluants rejetés par le leader à ceux du follower. Pour que le niveau de rejets du leader coïncide avec celui du follower, c'est-à-dire $\tilde{e}^1 - \tilde{e}^2 = 0$, il faut que $\left[\frac{\beta^2}{2\beta^1}\left(3\alpha-1+(1-\alpha)\frac{\beta^2}{\beta^1}\right)-\alpha\sqrt{2-\frac{\beta^2}{\beta^1}}\right] = 0$. En résolvant cette équation, on trouve que :

$$\alpha^* = \left(\frac{\beta^1-\beta^2}{\beta^1}\right)\frac{1}{\left[(3-\frac{\beta^2}{\beta^1})-2\frac{\beta^1}{\beta^2}\sqrt{2-\frac{\beta^2}{\beta^1}}\right]} \quad < 0 \tag{32}$$

Remarque 4 : Alors que la quantité de polluants rejetée par une firme augmente avec la préférence, la valeur des préférences (α^*) qui devrait conduire à une égalité dans les niveaux de rejet polluants entre firmes est cependant négative. Or, selon nos hypothèses de départ, $0 < \alpha < 1$. Il n'existe réellement donc pas de valeur critique de α pour laquelle les niveaux d'émission du leader et du follower coïncident. Par contre, lorsque $\beta^1 = \beta^2$, α^* devient positif car $\alpha^* \to 0$. Cette situation n'est pensable que lorsque les firmes ont les mêmes coûts marginaux de production. La valeur critique de α qui permettrait d'égaliser les quantités de polluants rejetées par le leader à celles du follower doit avoisiner 0. De ce fait, la valeur des préférences ne peut conduire à des quantités rejetées de polluants identiques pour le leader et le follower.

3.2 Effet sur les niveaux d'émission d'une variation du coût marginal

Dans cette section nous analysons l'impact sur les stratégies d'équilibre, d'un changement dans le coût marginal du concurrent [13]. Nous montrons que le follower est plus sensible à une variation du coût marginal du leader, c'est-à-dire que la quantité stratégique qu'elle offre suite à une augmentation du coût marginal du leader est plus élevée que la baisse de la quantité offerte par le leader. En outre, nous montrons et expliquons comment le prix du bien produit s'accroît lorsque la quantité totale offerte de ce bien augmente.

Proposition 5: *Lorsque $\alpha \to 1$, la variation du niveau de rejet du follower induite par une augmentation du coût marginal du leader est plus élevée que la variation du niveau de rejet du leader induite par une augmentation du coût marginal du follower.*

$$\frac{\partial \tilde{e}^2}{\partial \beta^1} - \frac{\partial \tilde{e}^1}{\partial \beta^2} = \frac{\alpha\phi}{2\beta^1}\left[\frac{\alpha\beta^2}{2\gamma^2\beta^1}\left(\frac{1}{\sqrt{2-\frac{\beta^2}{\beta^1}}}\right) + \frac{\beta^2}{\beta^1}\left(\frac{\beta^2}{\beta^1}-1\right)\frac{1-\alpha}{\gamma^2} - \frac{1+\alpha}{\gamma^1}\right] \quad > 0$$

Lorsque $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma$, on a :

$$\frac{\partial \tilde{e}^2}{\partial \beta^1} - \frac{\partial \tilde{e}^1}{\partial \beta^2} = \frac{\alpha\phi}{2\gamma\beta^1}\left[\alpha\frac{\beta^2}{\beta^1}\left(\frac{1}{\sqrt{2-\frac{\beta^2}{\beta^1}}}\right) + 2(1-\alpha)\frac{\beta^2}{\beta^1}\left(\frac{\beta^2}{\beta^1}-1\right) - \frac{1+\alpha}{2}\right] \quad > 0$$

Le follower réagit à une augmentation du coût marginal du leader en accroissant le niveau de ses rejets polluants alors que le leader baisse le sien. Par contre, la réaction du follower domine celle du leader car l'expression ci dessus est positive.

La variation de la quantité du bien 1 disponible induite par une variation du coût marginal du leader est donnée par :

$$\frac{\partial \tilde{q}^2}{\partial \beta^1} - \frac{\partial \tilde{q}^1}{\partial \beta^1} = \frac{\alpha\phi}{2(\beta^1)^2}\left[2\frac{\beta^2}{\beta^1}-1\right] \quad > 0$$

Le leader baisse la quantité qu'il offre lorsque son coût marginal augmente alors que follower augmente sa quantité offerte. Cependant, l'accroissement de la quantité stratégique offerte par

[13] On ne s'intéressera pas à l'effet sur le prix car, d'après son expression, il dépend uniquement du coût marginal du leader et ne saurait varier lorsque le coût marginal du follower varie.

le follower est supérieur à la baisse de la quantité stratégique offerte par le leader. En somme, la quantité totale offerte du bien 1 devient plus importante comparativement à la situation antérieure (avant variation du coût marginal). Le paradoxe est qu'on assiste à une augmentation du prix malgré l'augmentation de la quantité stratégique offerte du bien 1, parce que le prix n'est fonction que du coût marginal du leader.

3.3 L'équilibre de Cournot avec pollution

Dans cette section, nous considérons que tous les agents se font une concurrence à la Cournot, comme défini par Shapley and Shubik 1977 et Gabszewicz and Codognato 1991.

Définition 2 : L'équilibre de Cournot est donné par un vecteur de prix $\widehat{p_1} = p_1(\widehat{q}^1, \widehat{q}^2; \widehat{b}^1, .., \widehat{b}^n)$, un vecteur de stratégie $(\widehat{q}^1, \widehat{q}^2; \widehat{b}^1, \widehat{b}^j, ..., \widehat{b}^n) \in \Re^{2(n+2)}$ dans lequel $\widehat{q}^1 \in [0, y^1], \widehat{q}^2 \in [0, y^2], \widehat{b}^j \in [0, \frac{1}{n}], j = 1, ...n$, et une allocation $\widehat{\mathbf{x}} = (\widehat{x}^1, \widehat{x}^2; \widehat{x}^3, ...\widehat{x}^{n+2}) \in \Re_+^{2(n+2)}$ tels que :

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{x}}^i &= x^i(\widehat{q}, \widehat{p}_1) \quad \forall i = 1, 2 \\
\widehat{\mathbf{x}}^j &= x^j(\widehat{b}, \widehat{p}_1) \quad \forall j = 3, 4, ..., n+2 \\
\widehat{q}^1 + \widehat{q}^2 &= \frac{\sum_{j=1}^n \widehat{b}^j}{\widehat{p}_1(\widehat{q}^1, \widehat{q}^2; \widehat{b})} \\
\widehat{U}^j(\widehat{x}^j(\widehat{b}^j; p_1(\widehat{q}^1, \widehat{q}^2; \widehat{b}))) &\geq U^j(x^j(b^j; p_1(\widehat{q}^1, \widehat{q}^2; b^j, \widehat{b}^{-j}))) \quad \forall b^j \in S^j, \forall b^{-j} \in \prod_{-j} s^{-j}, \forall q \in S^1 \times S^2 \\
\widehat{U}^i(\widehat{x}^i(\widehat{q}^i; p_1(\widehat{q}^i, \widehat{q}^{-i}; \widehat{b}))) &\geq U^i(x^i(q^i, p_1(q^i; \widehat{q}^{-i}; \widehat{b}))) \quad \forall b \in \prod_j S^j, \forall q^{-i} \in S^{-i}, \quad \forall q^i \in S^i
\end{aligned}
$$

La proposition suivante donne les stratégies et les niveaux d'émission obtenus à l'équilibre de Cournot avec pollution.

Proposition 6 *: L'équilibre de Cournot avec pollution est donné par les stratégies* $(\widehat{q}^1, \widehat{q}^2, \widehat{b}^j)$ *et les niveaux d'émission* $(\widehat{e}^1, \widehat{e}^2)$ *suivants :*

$$\widehat{q}^1 = \frac{\alpha\beta^2}{(\beta^1 + \beta^2)^2}\phi \tag{33}$$

$$\widehat{q}^2 = \frac{\alpha\beta^1}{(\beta^1 + \beta^2)^2}\phi \tag{34}$$

$$\widehat{b}^j = \frac{\alpha(n-1)}{n(n-\alpha)} \quad j = 1, ..., n \tag{35}$$

$$\widehat{e}^1 = \frac{\alpha\beta^2\phi}{\gamma^1(\beta^1 + \beta^2)^2}(\alpha\beta^2 + \beta^1) \tag{36}$$

$$\widehat{e}^2 = \frac{\alpha\beta^1\phi}{\gamma^2(\beta^1 + \beta^2)^2}(\alpha\beta^1 + \beta^2) \tag{37}$$

Preuve : voir annexe 3

Remarque 5 *:* Lorsque le coût marginal du concurrent (β^{-i}) augmente, le niveau de rejet de la firme i baisse.

Proposition 7: Lorsque le coût marginal du concurrent (β^{-i}) augmente, la firme i réduit la quantité qu'elle offre si elle est la plus performante et l'augmente si elle ne l'est pas.

Preuve: A l'équilibre de Cournot, lorsque la productivité du concurrent augmente, c'est-à-dire lorsque le coût marginal baisse, la quantité stratégique offerte par le concurrent baisse. En effet, $\frac{\partial \widehat{q}^1}{\partial \beta^2} = \frac{\alpha(\beta^1-\beta^2)}{(\beta^1+\beta^2)^3}$ et $\frac{\partial \widehat{q}^2}{\partial \beta^1} = \frac{\alpha(\beta^2-\beta^1)}{(\beta^1+\beta^2)^3}$. La firme la plus performante cherche à raréfier le bien 1 lorsque le coût marginal de la moins performante augmente. Aussi, $\frac{\partial \widehat{e}^i}{\partial \beta^{-i}} = (\frac{\alpha\phi}{\gamma^i}\frac{\beta^i(\beta^i-\beta^{-i}+2\alpha\beta^{-i})}{(\beta^i+\beta^{-i})^3}) < 0$ si $\alpha > 0$.

Étant donné les stratégies d'équilibre, nous déduisons le prix $p = \frac{\sum_{j=1}^n b^j}{\sum_i^n q^i}$, qui est:

$$\widehat{p}_1 = \beta^1 + \beta^2 \tag{38}$$

Par rapport à cette expression du prix, on obtient les allocations individuelles des agents comme suit :

$$(\widehat{x}_1^1, \widehat{x}_2^1) = \left[\frac{\alpha^2\phi}{(\beta^1+\beta^2)^2}\beta^1, \frac{\alpha(1-\alpha)(\beta^2)^2\phi}{(\beta^1+\beta^2)^2}\right] \tag{39}$$

$$(\widehat{x}_1^2, \widehat{x}_2^2) = \left[\frac{\alpha^2\phi}{(\beta^1+\beta^2)^2}\beta^2, \frac{\alpha(1-\alpha)(\beta^1)^2\phi}{(\beta^1+\beta^2)^2}\right] \tag{40}$$

$$(\widehat{x}_1^j, \widehat{x}_2^j) = \left(\frac{\alpha}{n(\beta^1+\beta^2)}\phi, \frac{1-\alpha}{n}\phi\right), \quad j = 1, ..., n \tag{41}$$

De ces allocations, nous déterminons les niveaux d'utilité associés :

$$(\widehat{U}^1) = \alpha \ln \beta^1 + (1-\alpha)\ln\left[(1-\alpha)(\beta^2)^2\right] + \ln\frac{\alpha\phi}{(\beta^1+\beta^2)^2} \tag{42}$$

$$(\widehat{U}^2) = \alpha \ln \beta^2 + (1-\alpha)\ln\left[(1-\alpha)(\beta^1)^2\right] + \ln\frac{\alpha\phi}{(\beta^1+\beta^2)^2} \tag{43}$$

$$(\widehat{U}^j) = \alpha\ln\alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha) - \alpha\ln(\beta^1+\beta^2) + \ln\frac{\phi}{n}, \quad j = 1, ..., n \tag{44}$$

Proposition 8: Si les agents ont la même productivité, c'est à dire $\beta^1 = \beta^2$, alors ils ont les mêmes stratégies.

Ensuite, nous analysons à l'équilibre de Cournot, les relations qui existent entre les niveaux d'émission des agents, leurs sensibilités aux coûts marginaux et, montrerons le rôle des préférences sur les niveaux d'émission. De ce fait, nous apprécierons le niveau d'émission selon que β^1 est inférieur, supérieur, égale à β^2 , lorsque le nombre des agents du secteur 2 tend vers l'infini.

Les expressions suivantes présentent les valeurs des écarts de niveau d'émission et la sensibilité de ces émissions à une variation du coût marginal du concurrent.

$$\widehat{e}^1 - \widehat{e}^2 = \frac{\alpha\phi}{\gamma^1\gamma^2(\beta^1+\beta^2)^2}\left(\alpha[\gamma^2(\beta^2)^2 - \gamma^1(\beta^1)^2] + \beta^1\beta^2(\gamma^2-\gamma^1)\right) \tag{45}$$

$$\frac{\partial\widehat{e}^i}{\partial\beta^{-i}} = \frac{\alpha\phi}{\gamma^i}\frac{\beta^i}{(\beta^i+\beta^{-i})^3}[\beta^i + (2\alpha-1)\beta^{-i}] \tag{46}$$

$$\frac{\partial\widehat{e}^1}{\partial\beta^2} - \frac{\partial\widehat{e}^2}{\partial\beta^1} = \frac{\alpha\phi}{\gamma^1\gamma^2(\beta^1+\beta^2)^3}\left[\beta^1\beta^2(2\alpha-1)(\gamma^2-\gamma^1) + \gamma^2(\beta^1)^2 - \gamma^1(\beta^2)^2\right] \tag{47}$$

Lorsque $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma$ on a :

$$\widehat{e}^1 - \widehat{e}^2 = \frac{\alpha^2}{\gamma}\phi\left(\frac{\beta^2-\beta^1}{\beta^2+\beta^1}\right)$$
$$\frac{\partial\widehat{e}^1}{\partial\beta^2} - \frac{\partial\widehat{e}^2}{\partial\beta^1} = \frac{\alpha\phi(\beta^1-\beta^2)}{\gamma(\beta^1+\beta^2)^2}$$

Commentaires: La comparaison des niveaux d'émission permet de réécrire que lorsque $\beta^1 < \beta^2$ et $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma$, alors $(\widehat{e}^1 - \widehat{e}^2) > 0$ et si $\beta^1 > \beta^2$, alors $(\widehat{e}^1 - \widehat{e}^2) < 0$. Aussi, si $\beta^1 = \beta^2$, alors $(\widehat{e}^1 - \widehat{e}^2) = 0$. Par ailleurs, pour que $\frac{\partial\widehat{e}^i}{\partial\beta^{-i}} = 0$ il faut que $[\beta^i + (2\alpha-1)\beta^{-i}] = 0$. Cette expression peut se réécrire comme suit: $\beta^i = (1-2\alpha)\beta^{-i}$. Ainsi,

- Si $(1-2\alpha) > 1$, $\beta^i > (1-2\alpha)\beta^{-i}$ et $\frac{\partial\widehat{e}^i}{\partial\beta^{-i}} > 0$. Cette situation est impossible car $(1-2\alpha) > 1$ suppose que $\alpha < 0$, or selon nos hypothèses α est positif.

- Si $(1-2\alpha) < 1$, $\beta^i < (1-2\alpha)\beta^{-i}$ et $\frac{\partial\widehat{e}^i}{\partial\beta^{-i}} < 0$. Cette situation est bien possible. Par contre elle n'est valable que lorsque $\alpha > 0$ (En effet, $(1-2\alpha) < 1$ signifie que $-2\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 0$).

Proposition 9: Si $\alpha \to 1$, le niveau d'émission d'une firme baisse lorsque le coût marginal de son concurrent augmente.

Preuve : Les deux firmes productives émettent le même niveau de rejet si elles ont la même productivité. Par contre, si leurs productivités diffèrent, la firme productive ayant un niveau de productivité faible (la valeur de β la plus grande: savoir faire le moins efficace) émet moins de rejets comparativement à son concurrent. Cette situation peut s'expliquer par le fait que sa quantité produite et même offerte sera plus faible comparativement à son concurrent, du fait de son efficacité. En outre, $\frac{\partial\widehat{e}^i}{\partial\beta^{-i}} = \frac{\alpha\phi}{\gamma^i}\frac{\beta^i}{(\beta^i+\beta^{-i})^3}[\beta^i + (2\alpha-1)\beta^{-i}] < 0$ si $\alpha > 0$. Une firme productrice i diminue sa quantité de rejets polluants si le coût marginal de son concurrent (β^{-i}) augmente. Cette baisse est beaucoup plus élevée si $\alpha \to 1$. Par conséquent, la firme la plus productive atteint un niveau d'utilité plus élevé que celui de son concurrent. Aussi, lorsque $\alpha \to 1$, les quantités stratégiques offertes et les niveaux d'émission des agents i augmentent $\left(\frac{\partial\widehat{q}^i}{\partial\alpha} > 0; \frac{\partial\widehat{e}^i}{\partial\alpha} > 0\right)$.

3.4 Comparaison entre l'équilibre Stackelberg Cournot avec pollution et l'équilibre de Cournot avec pollution

Nous comparons le prix, les stratégies (quantités offertes), les niveaux d'émission et les paiements des agents obtenus de l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution à ceux de l'équilibre de Cournot avec pollution.

3.4.1 Comparaison des prix des équilibres stratégiques

Dans cette partie, nous nous focalisons sur les prix obtenus à l'équilibre Stackelberg-Cournot et à l'équilibre de Cournot.

A l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution, seul le coût marginal du leader influence le prix tandis qu'à l'équilibre de Cournot avec pollution, le prix ne dépend plus du coût marginal d'une seule firme mais des coûts marginaux de toutes les firmes productives. En d'autres termes, dans le premier équilibre, le prix s'égalise au double du coût marginal $(\tilde{p}_1 = 2\beta^1)$ de la firme leader tandis que dans le second, ce prix n'est que la somme des coûts marginaux des firmes productives ($\widehat{p}_1 = \beta^1 + \beta^2$). La différence de prix s'explique par l'écart qui existe entre les coûts marginaux du leader et du follower ($\beta^1 < \beta^2$) car si $\beta^1 = \beta^2$, $\quad \tilde{p}_1 = \widehat{p}_1$ et les prix obtenus de ces équilibres coïncident. De ce fait, il faut que le poids du follower atteigne un certain seuil pour qu'il soit à mesure d'impacter le prix. Cependant si son pouvoir de marché n'est pas nul mais reste relativement faible, il n'est pas "price taker" mais reste incapable d'influencer le prix. Le pouvoir de marché doit non seulement ne pas être nul mais aussi atteindre un certain seuil pour impacter le prix. Le fait de ne pas être "price taker" ne confère donc pas obligatoirement la capacité à une firme d'influencer le prix du marché : *ce résultat est également un apport de la modélisation en équilibre général sur des marchés interconnectés et limite l'idée qu'une firme qui n'est pas "price taker" manipule le prix du marché, à l'équilibre partiel sur des marchés isolés.*

3.4.2 Comparaison de la sensibilité des niveaux d'émission

Cette section permet de déterminer la sensibilité des niveaux d'émission à l'équilibre de Cournot. D'autre part, elle permet de comparer le niveau de sensibilité à celui obtenu à l'équilibre de Stackelberg-Cournot. La réaction d'une firme productrice à une variation du coût marginal de son concurrent, diffère selon que l'on est à l'équilibre de Stackelberg-Cournot ou à l'équilibre de Cournot. En effet, si $\alpha \to 1$ on a :

$$\frac{\partial \widehat{e}^1}{\partial \beta^2} - \frac{\partial \tilde{e}^1}{\partial \beta^2} = \frac{\alpha\phi}{\gamma^1}\left(\frac{\beta^1(\beta^1 + (2\alpha-1)\beta^2)}{(\beta^1+\beta^2)^3} - \frac{1+\alpha}{4\beta^1}\right) < 0 \tag{48}$$

$$\frac{\partial \widehat{e}^2}{\partial \beta^1} - \frac{\partial \tilde{e}^2}{\partial \beta^1} = \frac{\alpha\beta^2\phi}{\gamma^2}\left[\frac{\beta^2 + (2\alpha-1)\beta^1}{(\beta^1+\beta^2)^3} - \frac{1}{(\beta^1)^2}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{2-\frac{\beta^2}{\beta^1}}} + (1-\alpha)(\frac{\beta^2}{\beta^1} - 1)\right)\right] < 0 \tag{49}$$

Proposition 10*: A l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution, si $\alpha \to 1$, le niveau d'émission d'une firme est plus sensible à la variation du coût marginal du concurrent comparativement à la sensibilité qui serait observée à l'équilibre de Cournot avec pollution.*

Preuve: D'après la preuve de la *proposition* 9, $\frac{1}{(\beta^i+\beta^{-i})^3}\left[\beta^i + (2\alpha-1)\beta^{-i}\right] < 0$ si $\alpha > 0$, d'où $\frac{\partial \widehat{e}^1}{\partial \beta^2} - \frac{\partial \tilde{e}^1}{\partial \beta^2} < 0$ et $\frac{\partial \widehat{e}^2}{\partial \beta^1} - \frac{\partial \tilde{e}^2}{\partial \beta^1} < 0$.

Remarque 6 : A l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution, le leader réagit plus (l'augmentation du niveau de rejets) à une augmentation du coût marginal du follower comparativement au cas où les deux firmes se font une concurrence à la Cournot. De même, la réaction du follower à une augmentation du coût marginal du leader est plus élevée à l'équilibre Stackelberg-Cournot qu'à l'équilibre de Cournot. Ce constat s'explique par l'asymétrie qui existe dans le pouvoir de marché des agents : le leader saisit cette opportunité (hausse de β^2) qu'il combine à son pouvoir de marché pour creuser davantage d'écart avec le follower. De même, suite à une hausse du coût marginal (β^1) du leader, le follower s'empare de cette opportunité pour se rapprocher du leader.

3.4.3 Relations entre les stratégies d'équilibre Stackelberg-Cournot et Cournot

Nous déterminons le lien qui existe entre les stratégies à l'équilibre de Stackelberg-Cournot et celui de Cournot. Notre résultat vient accréditer celui de Julien and Tricou 2012 selon lequel, dans une économie à deux biens , si les agents stratégiques utilisent les mêmes technologies ($\beta^1 = \beta^2$), alors les deux équilibres coïncident lorsque le nombre des agents du secteur 2 tend vers l'infini. Aussi, nous montrons qu'il est possible que les quantités stratégiques offertes coïncident avec les niveaux d'émission. Les propositions suivantes sont valables lorsque le nombre des agents du secteur 2 tend vers l'infini.

Proposition 11*: Si $\beta = \beta^1 = \beta^2$ et $\gamma = \gamma^1 = \gamma^2$, alors les stratégies à l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution coïncident avec celles de Cournot avec pollution.*

Preuve :

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{q}^1 = \lim_{n\to\infty} \tilde{q}^1 = \lim_{n\to\infty} \tilde{q}^2 = \lim_{n\to\infty} \widehat{q}^2 = \frac{\alpha}{4\beta} \tag{50}$$

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{e}^1 = \lim_{n\to\infty} \tilde{e}^2 = \lim_{n\to\infty} \widehat{e}^1 = \lim_{n\to\infty} \widehat{e}^2 = \frac{\alpha(1+\alpha)}{4\gamma} \tag{51}$$

Remarques 7 : A l'équilibre de Cournot, si $\beta^1 = \beta^2$, on ne peut pas juger d'une domination entre les deux firmes productives. De même, si $\gamma \to 2\beta$ (sachant que $\beta = \beta^1 = \beta^2$), alors les quantités stratégiques offertes coïncident avec les niveaux d'émissions lorsque $\alpha \to 1$ et $\lim_{n\to\infty} \tilde{e}^1 = \lim_{n\to\infty} \tilde{e}^2 = \lim_{n\to\infty} \widehat{e}^1 = \lim_{n\to\infty} \widehat{e}^2 = \frac{1}{2\gamma}$ si $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma$.

Commentaires : Lorsque le leader et le follower ont la même productivité, le prix et les stratégies d'équilibre Stackelberg-Cournot coïncident avec ceux obtenus à l'équilibre de Cournot. La somme des quantités stratégiques offertes à l'équilibre de Stackelberg-Cournot est plus élevée que celle obtenue à l'équilibre de Cournot, d'où le constat que le prix à l'équilibre Stackelberg-Cournot est inférieur à celui de Cournot. En revanche, les agents du secteur 2, bien que n'étant pas directement impliqués dans l'interaction entre les firmes productives, préfèrent néanmoins une concurrence "à la Stackelberg" en amont entre les firmes productives. Cette situation leur est plus avantageuse comparativement à une concurrence à la Cournot car leur niveau d'utilité s'accroît.

Proposition 12*: A l'équilibre de Stackelberg-Cournot avec pollution, la quantité stratégique offerte par une firme productive augmente avec le coût marginal du concurrent, tandis qu'à l'équilibre de Cournot avec pollution cette quantité peut baisser.*

Preuve: A l'équilibre de Stackelberg-Cournot, une firme i accroît sa quantité stratégique offerte si le coût marginal de son concurrent baisse. Par contre, à l'équilibre de Cournot, ceci n'est observé que lorsque la firme n'est initialement moins performante que la firme ayant observé une hausse de son coût marginal. Si elle est initialement la plus performante, alors la quantité stratégique qu'elle offre baisse et le bien se raréfie davantage. En effet, $\frac{\partial \widehat{q^i}}{\partial \beta^{-i}} = \frac{\alpha(\beta^i - \beta^{-i})}{(\beta^i + \beta^{-i})^3}$: si $\beta^i > \beta^{-i}$ alors $\frac{\partial \widehat{q^i}}{\partial \beta^{-i}} > 0$ et si $\beta^i < \beta^{-i}$ alors $\frac{\partial \widehat{q^i}}{\partial \beta^{-i}} < 0$. En revanche, à l'équilibre Stackelberg-Cournot, $\frac{\partial \tilde{q}^1}{\partial \tilde{\beta}^2} = \frac{\alpha\phi}{4(\beta^1)^2} > 0$ et, $\frac{\partial \tilde{q}^2}{\partial \tilde{\beta}^1} = \frac{\alpha\phi}{4(\beta^1)^2}(\frac{\beta^2}{\beta^1} - 1) > 0$.

Proposition 13*: Si $\alpha \to 1$, à l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution, le niveau d'émission d'une firme augmente avec le coût marginal du concurrent alors qu'à l'équilibre de Cournot, le niveau d'émission baisse avec l'augmentation du coût marginal du concurrent.*

Preuve : En effet, à l'équilibre Stackelberg-Cournot, on a $\frac{\partial \tilde{e}^1}{\partial \beta^2} = \frac{\alpha\phi}{2\gamma^1\beta^1}\frac{1+\alpha}{2} > 0$ et $\frac{\partial \tilde{e}^2}{\partial \beta^1} = \frac{\alpha^2\phi}{2\gamma^2\beta^1}\frac{\beta^2}{\beta^1}\left[\left(\sqrt{2 - \frac{\beta^2}{\beta^1}}\right)^{-1} + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}\left(\frac{\beta^2}{\beta^1} - 1\right)\right] > 0$ tandis qu'à l'équilibre de Cournot,

$\frac{\partial \widehat{e}^i}{\partial \beta^{-i}} = \frac{\alpha\phi}{\gamma^i} \frac{\beta^i}{(\beta^i+\beta^{-i})^3} [\beta^i + (2\alpha - 1)\beta^{-i}] < 0.$

3.4.4 Comparaison des allocations d'équilibre (niveaux d'utilité)

Cette partie compare la quantité consommée des biens 1 et 2 par les agents à l'équilibre Stackelberg-Cournot à la quantité qu'il consomment à l'équilibre de Cournot. Nous montrons que les agents 1 et ceux du secteur 2 obtiennent des niveaux d'utilité plus élevés à l'équilibre Stackelberg-Cournot comparativement à l'équilibre de Cournot.

Proposition 14 : A l'équilibre Stackelberg-Cournot avec pollution, le leader et les agents du secteur 2 atteignent des niveaux d'utilité plus élevés que ceux obtenus à l'équilibre de Cournot avec pollution si $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Preuve: En effet, les allocations de l'agent 1 en bien 1 sont données respectivement par : $\tilde{x}_1^1 = \frac{\alpha^2}{4(\beta^1)^2}\beta^2\phi$ et $\widehat{x}_1^1 = \frac{\alpha^2\phi}{(\beta^1+\beta^2)^2}\beta^1$. En se basant sur l'hypothèse que $\beta^1 < \beta^2$, on a $\frac{1}{(2\beta^1)^2} > \frac{1}{(\beta^1+\beta^2)^2}$: on déduit que $\tilde{x}_1^1 > \widehat{x}_1^1$. Aussi, $\tilde{x}_2^1 = \frac{\alpha(1-\alpha)}{4}\frac{\beta^2}{\beta^1}\phi$ et $\widehat{x}_2^1 = \frac{\alpha\phi}{(\beta^1+\beta^2)^2}[(1-\alpha)(\beta^2)^2]$. Or $\frac{\alpha\phi\beta^2(1-\alpha)}{4\beta^1} > \frac{\alpha\phi\beta^2(1-\alpha)}{2(\beta^1+\beta^2)}$ et $\frac{2\alpha\beta^2}{\beta^1+\beta^2} < 1$ si $\alpha \leq \frac{1}{2}$, car $\frac{\beta^2}{\beta^1+\beta^2} < 1$. On déduit que $\tilde{x}_2^1 > \widehat{x}_2^1$. En raison du prix, les agents du secteurs 2 consomment plus de bien 1 à l'équilibre Stackelberg-Cournot qu'à l'équilibre de Cournot tandis que la quantité de bien 2 qu'ils consomment $\left(\frac{1}{n} - b^j\right)$ reste inchangée. Ces démonstrations prouvent que les niveaux d'utilité obtenu par l'agent 1 et les agents du secteur 2 sont plus élevés à l'équilibre Stackelberg-Cournot qu'à l'équilibre de Cournot lorsque $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

3.5 Comparaison avec l'équilibre concurrentiel avec pollution

Ici, tous les agents se livrent à une concurrence pure et parfaite sur leur secteur d'appartenance. On suppose que toute la production est vendue sur le marché. Pour déterminer le prix, on égalise la quantité totale offerte à la la quantité totale demandée. Chaque agent est "price taker".

Proposition 15: L'équilibre concurrentiel avec pollution est donné par les stratégies et les niveaux d'émission suivants :

- Si $\beta^1 \leq \beta^2$, l'équilibre est donné par :

$$\begin{aligned}
p_1^* &= \beta^1, \\
q^{1*} &= \frac{\alpha}{p} = \frac{\alpha}{\beta^1}, \\
e^{1*} &= \frac{\alpha}{\gamma^1} \\
(x_1^{i*}, x_2^{i*}) &= (0, 0), \quad \forall i = 1, 2 \\
(x_1^{j*}, x_2^{j*}) &= \left(\frac{\alpha}{np}; \frac{1-\alpha}{n}\right) \quad \forall j = 1, ...n
\end{aligned}$$

- Si $\beta^1 = \beta^2$, l'équilibre devient :

$$
\begin{aligned}
p_1^* &= \beta^1 = \beta^2 = \beta \\
q^{i*} &= \frac{\alpha}{2\beta}, \quad \forall i = 1,2 \\
e^{i*} &= \frac{\alpha}{2\gamma^i}, \quad \forall i = 1,2 \\
(x_1^{i*}, x_2^{i*}) &= (0,0), \quad \forall i = 1,2 \\
(x_1^{j*}, x_2^{j*}) &= \left(\frac{\alpha}{np}; \frac{1-\alpha}{n}\right) \quad \forall j = 1, ...n
\end{aligned}
$$

Preuve : voir annexe 4

3.6 Relations entre les équilibres stratégiques avec pollution et l'équilibre concurrentielle

Nous définissons l'existence de relation entre les stratégies des agents lorsqu'ils se font une concurrence imparfaite et lorsqu'ils se font une concurrence pure et parfaite. Lorsque la préférence des agents pour le bien 1 est très élevée ($\alpha \to 1$) et $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma$ et que la productivité des agents est la même ($\beta^i = \beta$) , alors la quantité émise de rejets polluants est la même pour toutes les firmes productives lorsque le nombre des agents du secteurs 2 tend vers l'infini. En outre, nous montrons que le prix à l'équilibre Stackelberg-Cournot est supérieur à celui obtenu à l'équilibre de Cournot qui, à son tour est supérieur au prix concurrentiel. .

Proposition 16*: Si $\alpha \to 1$ et $\beta^1 = \beta^2$, alors le niveau d'émission et les quantités offertes sont les mêmes pour toutes les firmes productrices lorsqu'ils sont en univers stratégique ou concurrentiel lorsque $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma$.* (**voir annexe 5**)

Remarque 8*:* Le prix d'équilibre en univers stratégique correspond au double du prix en univers concurrentielles si les firmes ont le même coût marginal. En effet $(\beta^1 + \beta^2) = 2\beta^1 = 2\beta^1$ d'où $\tilde{p}_1 = \widehat{p}_1 = 2p_1^*$.

Conclusion

Deux concepts d'équilibre d'oligopole bilatéral avec pollution ont été abordés en équilibre général: l'équilibre Stackelberg-Cournot et l'équilibre de Cournot. Notre étude montre qu'à l'équilibre Stackelberg-Cournot, le niveau d'émission d'une firme augmente avec le coût marginal du concurrent alors qu'à l'équilibre de Cournot il baisse. De plus, elle démontre que la variation du niveau de rejet d'une firme induite par une variation du coût marginal du concurrent, est plus élevée à l'équilibre Stackelberg-Cournot comparativement à l'équilibre de Cournot. L'analyse peut être élargie à une économie comportant plus de deux biens, à une économie dans laquelle les agents ont des préférences différentes pour les deux biens, à une économie où la technologie de production est non linéaire.

4 Annexes

Cette section comprends 5 annexes qui présentent de manière plus claire certains résultats de notre modèle.

4.1 Annexe 1 : Justification du choix des dotations initiales

Cette annexe explicite les raisons pour lesquelles les agents ont de telles dotations initiales. On montre comment les agents producteurs parviennent à produire même en n'ayant pas initialement une dotation en bien 2.

Les dotations en coin dont disposent les agents du secteur 2 se justifient par le fait que l'on fait l'hypothèse que ces agents se sont spécialisés dans l'offre du bien 2. Formellement, on suppose qu'ils bénéficient d'un avantage comparatif dans l'offre du bien 2, selon la théorie du commerce international de David Ricardo, pour qui chaque agent se spécialise dans l'offre du bien pour lequel il est le moins défavorisé. A l'inverse, les agents du secteur 1 ont une dotation initiale nulle en tous les biens et doivent produire pour déduire une partie qu'ils vendront sur le marché: comme la production du bien 1 requiert du bien 2, les agents producteurs ont une petite quantité de bien 2 que l'on décide de ne pas intégrer pour maintenir le caractère stratégique de chaque coté du marché et garantir le fait que ces agents se spécialisent également dans l'offre d'un seul bien, conformément à la la théorie du commerce international. Cette quantité d'intrant dont dispose initialement les agents producteurs n'est pas échangée sur le marché et n'est donc pas de ce fait pris en compte.

4.2 Annexe 2: Preuve de la proposition 1

En considérant la stratégie du leader comme donnée, les $(n+1)$ followers résolvent simultanément leurs programmes [14]. En appliquant les conditions de premier ordre aux programmes des followers, il en résulte que :

$$b^j(q^1) = g^j(q^1) = \frac{\alpha}{n}\phi, \quad j = 1, ..., n \quad ; \phi = \frac{n-1}{n-\alpha} \tag{52}$$

$$q^2(q^1) = -q^1 + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^2}\phi q^1} = f(q^1) \tag{53}$$

Le leader connaît parfaitement les meilleures réponses des $(n+1)$ followers. En vertu de l'équation (13), son programme s'écrit comme la maximisation de son paiement réduit:

$$Argmax_{\{q^1,e^1\}} \quad \alpha \ln\left(\frac{\gamma^1 e^1}{\beta^1} - q^1\right) + (1-\alpha)\ln\left(\frac{\sum_j g^j(q^1)}{q^1 + f(q^1)} q^1 - \gamma^1 e^1\right)$$

On peut réécrire après l'intégration de l'expression de $q^2(q^1)$ que:

$$Argmax_{\{q^1,e^1\}} \quad \alpha \ln\left(\frac{\gamma^1 e^1}{\beta^1} - q^1\right) + (1-\alpha)\ln\left(\sqrt{\alpha\beta^2\phi q^1} - \gamma^1 e^1\right) \tag{54}$$

[14] C'est à dire $b^j(q^1) \in Argmax_{\{b^j\}} \quad \alpha \ln\left(\frac{q^1+q^2}{b^j+B^{-j}} b^j\right) + (1-\alpha)\ln\left(\frac{1}{n} - b^j\right), \forall q^1 \quad j = 1, ..., n, .$; $q^2(q^1) \in Argmax_{\{q^2,e^2\}} \quad \alpha \ln\left(\frac{\gamma^2 e^2}{\beta^2} - q^2\right) + (1-\alpha)\ln\left(\frac{\alpha\phi}{q^1+q^2} q^2 - \gamma^2 e^2\right), \forall q^1$. En considérant comme donnée les stratégies du leader et du follower du secteur 1, l'agent j prend également comme donnée les stratégies des autres agents du secteur 2, c'est à dire $((n-1)b^{-j})$. On peut dire autrement qu'un agent j, au moment où il résout son programme d'optimisation, la stratégie des autres agents dépend également de sa stratégie. En faisant l'hypothèse que ces agents ont des comportements symétriques, on peut réécrire que : $b^j = b^{-j}$. En appliquant les conditions de maximisation de premier ordre suivi de quelques transformations, on obtient que $b^j = g^j(q^1) = \frac{\alpha}{n}\phi$.

En appliquant les conditions de maximisation de premier ordre puis en résolvant on obtient que :

$$
\begin{aligned}
\tilde{q}^1 &= \frac{\alpha\beta^2}{4(\beta^1)^2}\phi \\
\tilde{e}^1 &= \frac{\alpha(1+\alpha)}{4\gamma^1}\frac{\beta^2}{\beta^1}\phi
\end{aligned}
$$

Des expressions ci dessus, on déduit les stratégies d'équilibre du follower

$$
\begin{aligned}
\tilde{q}^2 &= \frac{\alpha\phi}{4(\beta^1)2}\left(2\beta^1-\beta^2\right) \\
\tilde{e}^2 &= \frac{\alpha^2\phi}{2\gamma^2}\left[\left(2-\frac{\beta^2}{\beta^1}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1-\alpha}{2\alpha}\frac{\beta^2}{\beta^1}\left(2-\frac{\beta^2}{\beta^1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

4.3 Annexe 3: Preuve de la proposition 6

A l'équilibre de Cournot, les $(n+2)$ agents sont tous des followers. L'équilibre de Cournot se résume à la résolution simultanée des programmes suivants :

$$
\begin{aligned}
Argmax_{\{b^j\}} \quad & \alpha\ln\left(\frac{q^1+q^2}{b^j+B^{-j}}b^j\right)+(1-\alpha)\ln\left(\frac{1}{n}-b^j\right), \quad j=1,...,n. \\
Argmax_{\{q^1,e^1\}} \quad & \alpha\ln\left(\frac{\gamma^1e^1}{\beta^1}-q^1\right)+(1-\alpha)\ln\left(\frac{\sum_j b^j}{q^1+q^2}q^1-\gamma^1e^1\right) \\
Argmax_{\{q^2,e^2\}} \quad & \alpha\ln\left(\frac{\gamma^2e^2}{\beta^2}-q^2\right)+(1-\alpha)\ln\left(\frac{\sum_j b^j}{q^1+q^2}q^2-\gamma^2e^2\right)
\end{aligned}
$$

En appliquant les conditions de maximisation du premier ordre , on obtient comme dans (53), les fonctions de réactions suivantes :

$$
b^j(q^1,q^2) = g^j(q^1,q^2) \tag{55}
$$

$$
q^1(q^2) = -q^2+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta^1}\phi q^2} \tag{56}
$$

$$
q^2(q^1) = -q^1+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta^2}\phi q^1} \tag{57}
$$

Ces fonctions de réaction explicitent une pente négative lorsque la quantité stratégique offerte par le concurrent augmente. En remplaçant les équations les unes dans les autres , on obtient les stratégies optimales et les niveaux d'émission des agents :

$$\begin{aligned}
\widehat{b^j} &= \frac{\alpha(n-1)}{n(n-\alpha)} = \frac{\alpha}{n}\phi \quad ; \phi = \frac{n-1}{n-\alpha} \quad j = 1, ..., n \\
\widehat{q^1} &= \frac{\alpha\beta^2}{(\beta^1+\beta^2)^2}\phi \\
\widehat{q^2} &= \frac{\alpha\beta^1}{(\beta^1+\beta^2)^2}\phi \\
\widehat{e^1} &= \frac{\alpha\beta^2\phi}{\gamma^1(\beta^1+\beta^2)^2}(\alpha\beta^2+\beta^1) \\
\widehat{e^2} &= \frac{\alpha\beta^1\phi}{\gamma^2(\beta^1+\beta^2)^2}(\alpha\beta^1+\beta^2)
\end{aligned}$$

4.4 Annexe 4 : Preuve de la proposition 15

A l'équilibre concurrentiel, le programme des agents du secteur 2 s'écrit comme suit:
$Max \quad \alpha \ln x_1^j + (1-\alpha)\ln x_2^j; \quad$ s/c $\quad px_1 + x_2 \leq \frac{1}{n}$. En appliquant les conditions de maximisation de premier ordre puis en résolvant on obtient l'allocation des agents du secteur 2, qui dépend de p et qui s'exprime comme suit :

$$(x_1^j, x_2^j) = \left(\frac{\alpha}{np_1}; \frac{1-\alpha}{n}\right)$$

Les agents du secteur 1 , quant à eux, maximisent le programme suivant:
$Max \quad \alpha \ln x_1 + (1-\alpha)\ln x_2; \quad$ s/c $\quad p_1x_1^i + x_2^i \leq p_1\frac{\gamma^i e^i}{\beta^i} - \beta^i e^i$. Sur la base de l'équation (6), on peut réécrire la contrainte comme suit : s/c $\quad p_1x_1^i + x_2^i \leq (p_1 - \beta^i)\frac{\gamma^i e^i}{\beta^i}$. Dans cette expression $(p-\beta^i)$ est la marge bénéficiaire par unité produite. Ainsi si $p_1 = \beta^i$, le profit de la firme productrice est nul. Par conséquent, elle ne pourra pas s'offrir le bien 2.

- Si $\beta^1 \leq \beta^2$, la firme 1 a une productivité supérieure ou égale à celle de la firme 2. Ainsi $q^i = 0$ [15] pour $p_1 < \beta^i$. En concurrence pure parfaite, les quantités offertes ne sont plus stratégiques : les agents offrent la totalité de leur production d'où $q^{1*} = y^{1*}$. En revanche si $p_1 = \beta^i, \quad 0 \leq q^i \leq max \quad q^i$. Par contre, si $p_1 > \beta^i, \quad q^i = max \quad q^i$.

- Si $\beta^1 \leq \beta^2$, la firme 1 est plus productive que la firme 2. Dans une telle situation, seule la firme 1 produira le bien 1 et le prix du marché sera $p_1 = \beta^1$. La demande totale du bien 1 étant de $(\frac{\alpha}{p_1})$ [16], elle sera confrontée à la seule offre q^1. Nous récapitulons les résultats obtenus comme suit:

[15] la quantité stratégique offerte sera nulle parcequ'il n'y aura pas de production, c'est à dire que $y^i = 0$
[16] On multiplie par n la demande individuelle des agents du secteur 2

$$
\begin{aligned}
p_1^* &= \beta^1, \\
q^{1*} &= \frac{\alpha}{p} = \frac{\alpha}{\beta^1}, \\
e^{1*} &= \frac{\alpha}{\gamma} \\
(x_1^{i*}, x_2^{i*}) &= (0,0), \quad \forall i = 1,2 \\
(x_1^{j*}, x_2^{j*}) &= \left(\frac{\alpha}{np}; \frac{1-\alpha}{n}\right) \quad \forall j = 1, ...n
\end{aligned}
$$

- Si $\beta^1 = \beta^2$, les firmes ont la même productivité. La demande totale du marché est assurée par les deux firmes productrices, c'est à dire que $(q^{1*} + q^{2*}) = \frac{\alpha}{p}$. Elles offrent la même quantité sur le marché. Le prix en concurrence pure et parfaite étant choisi de sorte qu'il soit identique au coût marginal de production, nous récapitulons les résultats comme suit:

$$
\begin{aligned}
p_1^* &= \beta^1 = \beta^2 = \beta \\
q^{i*} &= \frac{\alpha}{2\beta}, \quad \forall i = 1,2 \\
e^{i*} &= \frac{\alpha}{2\gamma^i}, \quad \forall i = 1,2 \\
(x_1^{i*}, x_2^{i*}) &= (0,0), \quad \forall i = 1,2 \\
(x_1^{j*}, x_2^{j*}) &= \left(\frac{\alpha}{np}; \frac{1-\alpha}{n}\right) \quad \forall j = 1, ...n
\end{aligned}
$$

4.5 Annexe 5 : Preuve de la proposition 16

Nous prouvons l'existence d'une identité des niveaux d'émission des firmes productrices lorsque les agents du secteur 2 sont infinis et, ceci que les agents interagissent ou pas de manière stratégique. En rappel, lorsque les agents du secteur 2 tendent vers l'infini en nombre, à l'équilibre Stackelberg-Cournot, le leader et le follower émettent respectivement les quantités $\tilde{e}^1 = \frac{\alpha(1+\alpha)}{4\gamma^1}\frac{\beta^2}{\beta^1}$ et $\tilde{e}^2 = \frac{\alpha^2\phi}{2\gamma^2}\left[\left(2-\frac{\beta^2}{\beta^1}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1-\alpha}{2\alpha}\frac{\beta^2}{\beta^1}\left(2-\frac{\beta^2}{\beta^1}\right)\right]$. Par ailleurs, lorsque ces mêmes firmes se livrent à une concurrence à la Cournot le niveau des émissions rejetés à l'équilibre est $\widehat{e}^i = \frac{\alpha\beta^{-i}\phi}{\gamma^i(\beta^i+\beta^{-i})^2}(\alpha\beta^{-i} + \beta^i)$ [17] contre $e^{i*} = \frac{\alpha}{2\gamma^i}$, $\forall i = 1,2$ si ces agents sont en concurrence pure et parfaite. Ainsi , si $(\alpha \to 1)$ et $\beta^1 = \beta^2$, on détermine que $\lim_{n\to\infty} \tilde{e}^1 = \lim_{n\to\infty} \tilde{e}^2 = \lim_{n\to\infty} \widehat{e}^1 = \lim_{n\to\infty} \widehat{e}^2 = \lim_{n\to\infty} e^{i*} = \frac{1}{2\gamma^i}$.

References

Amir, R., S. Sahi, M. Shubik, and S. Yao (1990). "A strategic market game with complete markets". *Journal of Economic Theory* 51.1, pp. 126–143.

Bonnisseau, J.-M. and M. Florig (2003). "Existence and optimality of oligopoly equilibria in linear exchange economies". *Economic Theory* 22.4, pp. 727–741.

Chen, Y and B. F. Hobbs (2005). "An Oligopolistic Power Market Model with Tradable NOx Permits". *IEEE Transactions on Power System* 20.1, pp. 119–129.

[17] β^{-i} représente l'inverse de la productivité de la firme concurrente

Crettez, B., P.-a. Jouvet, and L. A. Julien (2014). “Working Paper Series Tax Policy in a Simple General Oligopoly Equilibrium Model with Pollution Permits”. *Les Cahiers de la chaire Economie du Climat* December 2012.

Dickson, A. and R. Hartley (2011). “Trade in Bilateral Oligopoly with Endogeneous Market Formation”. *Stracthclyde discussion papers in Economics* 11.04, pp. 1–40.

Dickson, A. and R. Hartley (2013). “Bilateral oligopoly and quantity competition”. *Economic Theory* 52.3, pp. 979–1004.

Dierker, E. and B. Grodal (1999). “The price normalization problem in imperfect competition and the objective of the firm”. *Economic Theory* 14, pp. 257–284.

Dierker, H. and B. Grodal (1986). “Nonexistence of Cournot Walras equilibrium in a general equilibrium model”. *Contributions to Mathematical Economics in Honor of Gérard debreu, Amsterdam : North-Holland* W.Hilden-brand and A.Mas collel,eds. Pp. 167–185.

Gabszewicz, J. and G. Codognato (1991). “Équilibres de Cournot-Walras dans une économie d ’ échange”. 42, pp. 1013–1026.

Gabszewicz, J. J. (2002). *Strategic Multilateral Exchange: General Equilibrium with Imperfect Competition.*

Gabszewicz, J. J. and P Michel (1997). “Oligopoly Equilibria in Exchange Economies”. *Core Discussion paper.*

Gabszewicz, J. J. and J.-P. Vial (1972). “Oligopoly"A la Cournot" in General Equilibrium Analysis”. *Journal of Economic Theory* 400, pp. 381–400.

Hahn, R. (1984). *Market Power and Transferable Property Rights.*

Julien, L. A. (2017). “Hierarchical competition and heterogeneous behavior in noncooperative oligopoly markets”. *mimeo, Université Paris Nanterre*, p. 32.

Julien, L. A. and F. Tricou (2010). “Oligopoly Equilibria “à la Stackelberg” in Pure Exchange Economies”. *Recherches économiques de Louvain* 76.2, p. 175.

Julien, L. A. and F. Tricou (2012). “Market price mechanisms and stackelberg general equilibria: An example”. *Bulletin of Economic Research* 64.2, pp. 239–252.

Montero, J.-P. (2002). “Permits, Standards, and Technology Innovation”. *Journal of Environmental Economics and Management* 44.1, pp. 23–44.

Montero, J. P. (2009). “Market power in pollution permit markets”. *Energy Journal* 30.Special issue 2, pp. 115–142.

Sahi, S. and S. Yao (1989). “The non-cooperative equilibria of a trading economy with complete markets and consistent prices”. *Journal of Mathematical Economics* 18.4, pp. 325–346.

Sanin, M.-E. and S. Zanaj (2011). “A Note on Clean Technology Adoption and its Influence on Tradeable Emission Permits Prices”. *Environmental and Resource Economics* 48.4, pp. 561–567.

Sanin, M.-E. and S. Zanaj (2012). “Clean Technology Adoption Under Cournot Competition”. *Strategic Behavior and the Environment* 2.2, pp. 159–172.

Shapley, L. and M. Shubik (1977). “Trade Using One Commodity as a Means of Payment”. *Journal of Political Economy* 85.5, p. 937.